К вопросу о логическом развитии школьников на уроках математики

С.Р. Когаловский

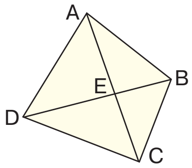
Идеальный характер математических понятий и конструкций делает их универсальными средствами моделирования, однако обусловливает необходимость формально-логических средств их исследования. Такими средствами являются **доказательства**.

Доказательства служат не только для проверки истинности предположений, но это и средства прояснения связей между ними, и эффективные объяснительные средства, и средства проверки работоспособности формируемого математического инструментария. Доказательства – это сведение исследуемых предположений и связей между ними к «Всеобщим Основаниям», являющимся продуктом Большого Опыта и предстающим как априорные истины. Поэтому способствование осознанию учащимися необходимости доказательств и развитию способности к их поиску является важной задачей при обучении математике. Поиск эффективных средств ее решения нуждается в прояснении характера трудностей, возникающих в ходе этого поиска.

Обратимся к следующим простым задачам.

Задача 1. Верно ли, что периметр четырехугольника меньше удвоенной суммы длин его диагоналей?

Вот какое решение этой задачи обычно предлагают школьники:



Так как для всяких точек M и N длина отрезка MN меньше длины любой ломаной, соединяющей эти точки, то следующие неравенства истинны:

$AB < AE + BE$, $BC < BE + CE$, $CD < CE + DE$, $AD < AE + DE$.

Отсюда

$$AB + BC + CD + DE < 2((AE + EC) + (BE + ED)) = 2(AC + BD).$$

Приведенное «решение» неявно основывается на условии выпуклости четырехугольника.

Ошибка состоит в сужении объема понятия четырехугольника. Но каков исток этого сужения? Могло ли быть иначе, если на протяжении процесса обучения не рассматривались невыпуклые многоугольники, если предлагаемое доказательство не было формализовано, если понятие четырехугольника, к которому это доказательство апеллирует, раскрывалось не полностью?

В рамках отрывочной, или «кусочной», содержательной базы, которой располагают школьники, проведенное «доказательство» является вполне корректным. (По сути, это доказательство того, что «обычно», «как правило», периметр четырехугольника меньше удвоенной суммы длин его диагоналей.) Повышение строгости доказательной базы в таких условиях осуществимо за счет расширения содержания, за счет его обогащения фактами, открываемыми с помощью неформальных средств. Многие такие факты принципиально невыводимы из той логической базы и аксиом, на которых строится школьный курс математики.

Нет таких приемов, процедур, методов, используемых в математике, которые не использовались бы в поиске доказательств. Нет таких стратегий поисковой деятельности, которые не использовались бы как стратегии поиска доказательств. Усиление «разрешающей способности» логических средств исследования невозможно без развития «разрешающей способности» неформальных средств, без развития эмпирического мышления, без развития допонятийных форм мышления.

«Легитимация» таких форм мышления не только не уведет от строгости доказательств, но будет способствовать более полному овладению ею и откроет возможность достижения учащимися более высокого уровня теоретической культуры.

Задача 2. Существуют ли функции, являющиеся одновременно (строго) возрастающими и убывающими?

Школьники обычно предлагают такое решение этой задачи:

– Таких функций, конечно же, нет. В самом деле, допустим, что f – такая функция. Так как она возрастающая, то для всяких значений ее аргумента x_1 и $x_2 > x_1$ имеет место $f(x_2) > f(x_1)$. Но так как она убывающая, то $f(x_1) > f(x_2)$. Из двух последних неравенств следует $f(x_2) > f(x_2)$, а значит, $f(x_2) \neq f(x_2)$. Пришли к противоречию.

Это «решение» основывается на условии, что область определения функции содержит более одного числа. Из зоны внимания выпали функции с одноэлементными областями определения. (Такова, например, функция $y = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$.) Но такие функции не включались в то содержательное поле, которое выстраивалось в процессе обучения. В рамках той «кусочной» содержательной базы, которой располагают школьники, и это «доказательство» является вполне корректным. (По сути, это доказательство того, что «обычная», «нормальная» функция не может быть одновременно (строго) возрастающей и убывающей.)

Пусть f – функция с одноэлементной областью определения. Она является возрастающей, т.е. такой, что для всяких значений ее аргумента x_1 и x_2 истинна импликация $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. Ее истинность следует из ложности посылки. Аналогично доказывается, что f – убывающая функция. Таким образом, в действительности ответ на поставленный вопрос положителен. Школьники с трудом воспринимают это, казалось бы, тривиальное доказательство.

А вот воспринимаемая намного проще другая форма доказательства того, что f – возрастающая функция:

– Допущение, что f не является возрастающей функцией, означает, что существуют значения ее аргумента x_1 и $x_2 > x_1$, для которых имеет место $f(x_2) \leq f(x_1)$, а значит, что существуют по крайней мере два разных значения аргумента. Но последнее противоречит условию.

Задача 3. Одно ли и то же пустое множество собак и пустое множество кошек? Сколько существует пустых множеств?

Для любых пустых множеств O_1 и O_2 имеет место $O_1 \subset O_2$. В самом деле, последнее включение означает, что для всякого объекта a истинна импликация $a \in O_1 \rightarrow a \in O_2$. И эта импликация истинна, так как ее посылка ложна. Таким образом, пустые множества включаются друг в друга и потому равны.

Это, казалось бы, простое доказательство вызывает трудности у многих школьников. Какова природа этих трудностей?

Если обычно доказательства в школьном курсе математики развертываются в рамках освоенного пространства значений и смыслов, если логический план в таких доказательствах неразрывно связан со смысловым, с наличествующей содержательной базой, то в доказательствах, дающих решение задач 2 и 3, довлеет «чисто» логический план. Предельный, вырожденный характер ситуаций, рассматриваемых в этих задачах и выводящих за пределы освоенного смыслового пространства, делает их и подобные им задачи эффективным средством стимулирования логического мышления учащихся.

Если доказательства фактов, относящихся к освоенному смысловому пространству, несут, говоря словами Адамара, узаконение завоеваний интуиции, то в ситуациях, подобных обсуждаемым, они подготавливают ее завоевания на новых территориях. Применительно к таким ситуациям было бы наивно ставить перед учащимися задачи открытия доказательств, но естественно и продуктивно ставить задачи освоения предлагаемых доказательств и тем самым формировать зоны ближайшего развития, входящие в зоны как собственно логического, так и общего умственного развития.

Столкновение с «вырожденными» случаями, с пограничными ситуациями приводит к необходимости обращения к логике, «очищенной» от смысловых примесей. Овладение способностью применять «чистую» логику приводит к новому уровню логического развития, а с ним – и к новому уровню математической и общей интеллектуальной культуры. Но какие средства позволили бы поднять учащихся общеобразовательной школы до уровня овладения способностью применять «чистую» логику?

Заметим, что решение задачи 3, также как и решение задачи 2, гораздо легче воспринимается учащимися в форме доказательства от противного:

– Для любых пустых множеств O_1 и O_2 имеет место $O_1 \subset O_2$. Ведь противное означало бы, что существует элемент a множества O_1, не являющийся элементом O_2. Но из $a \in O_1$ следовало бы, что O_1 – непустое множество, вопреки условию. Таким образом, пустые множества включаются друг в друга и потому равны.

Итак, доказательство, казалось бы весьма простое, не воспринимается учащимися, но оно же в несколько иной постановке воспринимается без существенных затруднений. Значит, дело здесь в форме доказательства, или в логической форме. Если первый вариант доказательства, скажем, единственности пустого множества апеллирует к истинности предложения, имеющего логический скелет вида

$$(\forall x)\,(\Phi(x) \Rightarrow \Psi(x)), \qquad (1)$$

где $\Phi(x)$ ложно, то второй – к ложности предложения, логический скелет которого таков:

$$(\exists x)\,(\Phi(x) \wedge \Psi(x)), \qquad (2)$$

где $\Phi(x)$ также ложно. Если ложность предложения вида (2) воспринимается так же легко, как, скажем, ложность предложения «существует число, не равное самому себе и четное», то истинность предложения вида (1) выводится из истинности формулы

$$\lambda \Rightarrow \Psi, \qquad (3)$$

где λ – ложная формула. Но так ли просто на той содержательной базе и на том уровне логического развития, какие формируются в сегодняшней школе, принять (3) как логический закон? Так ли просто подняться над многообразием тех содержательных, математических контекстов, в которых логическое следование фигурирует как сугубо содержательное отношение, для того чтобы смочь подвергнуть (3) продуктивному обсуждению? Можно ли, в частности, усмотреть в импликации продуктивную модель отношения логического следования, не характеризуемого только соотношением истинностных значений ее посылки и заключения? Не говорит ли это о том, что логической базы, необходимой для развертывания школьного курса математики, у школьников в наличии нет, что она должна закладываться и развиваться в процессе учебной деятельности? Кроме того, это говорит о необходимости в рассмотрениях, подобных приведенным выше, особого педагогического такта – логического.

То, что понимают обычно под логикой, говоря о необходимости формирования у школьников способности к открытию доказательств математических суждений, не есть формальная логика в строгом смысле. Отношение логического следования не есть чисто логическое отношение, поскольку оно не очищено от содержательного плана, не выражается лишь через соотношение истинностных значений посылки и заключения, а понятие логического вывода не определено в формально-логической форме. Школьники приобщены не ко всем логическим законам, фактически используемым в рамках школьного курса математики. С учетом всего этого естественнее говорить здесь не о формальной, а о протоформальной или даже о неформальной логике.

Обсуждение рассмотренных выше задач помогает увидеть, что проблема логического развития школьников есть важный компонент их математического развития. Проблема формирования способности открывать доказательства далеко не столь проста, как это рисуется в некоторых исследованиях, она требует более глубокого изучения.

Нельзя недооценивать значения логических упражнений, способствующих развитию механизмов анализа и логической культуры учащихся, а с ней – и развитию их математической культуры. Но следует различать логическую культуру или то, что под нею обычно понимают, и владение многомерной логикой математической деятельности, зиждущееся на достаточно высоком развитии механизмов понимания, синтеза их взаимодействий с механизмами анализа. Логическая культура не обеспечивает овладения логикой математической деятельности, также как культура речи, необходимая для литературного творчества, не обеспечивает способности к нему.

Не столько собственно логические упражнения, сколько расширение и углубление математических знаний ведет к развитию способности к строгости, к логическому развитию. Первые шаги на этом пути должны осуществляться уже в начальной школе.

Логические ошибки, состоящие в сужении объемов исследуемых понятий, весьма распространены, и авторы книг, посвященных развитию логической культуры школьников, уделяют их обсуждению особое внимание. Меньшее внимание уделяется весьма распространенным логическим нарушениям, состоящим в расширении объемов исследуемых понятий. Такие нарушения обычно проистекают из того, что определения понятий «не работают», что использование определений школьники подменяют обращением к образам, смыслам, содержаниям, создаваемым традиционными средствами первичного приобщения к вводимым понятиям, допуская суженность, упрощенность, обедненность выстраиваемых при этом контекстов. Такие способы приобщения к математическим понятиям направлены лишь на ближайшие цели, и потому рассмотрения ведутся лишь в рамках упрощенных контекстов. Вследствие этого они уводят от целей стратегических, от раскрытия «пограничного» характера культуры понятийного мышления, а тем самым от воспитания у школьников логической культуры.

Следующий сценарий демонстрирует, как из весьма элементарного предмета рассмотрения учитель может извлечь большие возможности для воспитания у школьников логической культуры и, в частности, преодоления логических нарушений. Он также демонстрирует, как интуитивные представления превращаются в средство восхождения на логический уровень. Сценарий есть описание процесса формирования понятия окружности, отправляющегося от диффузных представлений о ней. Уже первичное определение (см. № 1) при всей его неадекватности подготавливает скачок от интуитивного уровня рассмотрения к уровню логическому. Буквалистское толкование этого определения создает возможность его исследования на адекватность посредством обращения к предельно широкому (в наличествующих рамках) пространству возможных моделей и тем самым создает возможность его преобразования в более адекватное определение. При наличии лишь неформальных средств это, повидимому, единственно возможная и продуктивная форма прорыва к логическому уровню исследования.

№ 1. Учитель рисует на доске от руки окружность и еще несколько овалов, очень и не очень вытянутых.

– Какой из этих рисунков больше похож на окружность?

Дети показывают.

– А в чем особенность окружности? *(В том, что она не вытянута; в том, что она имеет правильную форму.)*

Учитель рисует квадрат и несколько прямоугольников, очень и не очень вытянутых.

– Разве квадрат вытянут, разве его форма не является правильной? Может быть, квадрат тоже является окружностью? *(Конечно, нет!)*

– Так в чем же различие форм этих «правильных» фигур? *(В том, что в отличие от квадрата у окружности нет углов, нет заострений.)*

Учитель рисует «правильную» гладкую фигуру, похожую на многолепестковый цветок.

– Вот правильная фигура, у которой нет заострений. Является ли она окружностью? Ведь нет же? Так что же такое окружность?

Затем учитель снова рисует от руки окружность. Получается не очень удачный рисунок. После этого окружность рисуется с помощью циркуля.

– Второе изображение окружности вполне удовлетворительное, не правда ли? Это достигнуто с помощью циркуля. Фиксированное положение его ножки и раствор циркуля позволили нарисовать такую фигуру, что все ее точки находятся на одном и том же расстоянии от ее центра – точки, в которой зафиксирована ножка циркуля. Такая фигура и есть окружность. Как же, исходя из всего этого, дать четкое описание того, что такое окружность, не привлекая описание способа ее построения с помощью циркуля? Иначе говоря, как дать описание того, что такое окружность, на чистом геометрическом языке, как описание линии, обладающей такими-то и такими-то свойствами? *(Окружность – это линия, все точки которой находятся на одном и том же расстоянии от некоторой точки, называемой ее центром.)*

– Характеризует ли это описание все окружности и только их?

№ 2. Учитель:

– Пусть α и ρ – параллельные плоскости. Рассмотрим какую-нибудь прямую m, перпендикулярную им. Пусть A – точка пересечения m с α, B – точка пересечения m с β. Рассмотрим на плоскости α такую окружность с центром в точке A, что ее точки находятся на расстоянии R от A, а на плоскости β такую окружность с центром в точке B, что ее точки находятся на таком же расстоянии от B. Согласно последнему определению пара этих окружностей является окружностью с центром в середине отрезка AB. Но является ли она окружностью в привычном, естественном смысле? *(Она не является окружностью не только в привычном смысле, но и в смысле последнего определения, потому что она не является линией.)*

– Но что такое линия? *(Это то, что можно нарисовать, скажем, карандашом на листе, не отрывая его от бумаги.)*

– И не обязательно на плоском листе бумаги, а, например, на сферическом. Однако прямые линии или их отрезки невозможно нарисовать. Ведь это идеальные объекты. Но естественно ли не относить их к линиям?

Учитель рисует пару пересекающихся окружностей на сфере.

– Эта линия является окружностью в смысле последнего определения. Но является ли она окружностью в привычном, естественном смысле? *(Нет, не является. Хотя бы потому, что ее точки не лежат в одной плоскости. А по-моему, и такую пару окружностей неестественно называть линией.)*

– Так что же такое линия? Является ли линией, например, пара или тройка точек?

№ 3. С помощью циркуля учитель рисует какую-нибудь часть окружности, например полуокружность.

– Так как все точки окружности находятся на одном и том же расстоянии от ее центра, то всякая часть окружности – это линия, все точки которой находятся на одном и том же расстоянии от некоторой точки. А значит, согласно предложенной вами характеристике или определению, всякая часть окружности есть окружность. Естественно ли такое определение? Нет, конечно. Оно нуждается в корректировке. Попытаемся усмотреть различие между окружностью и ее частями.

Окружность, в отличие от ее частей, состоит из всех точек, находящихся на определенном расстоянии от ее центра. А значит, уточненное определение окружности должно быть таким: окружность – это линия, состоящая из всех точек, находящихся на определенном расстоянии от некоторой точки, называемой ее центром.

Но все точки, находящиеся на определенном расстоянии от данной точки, образуют сферу с центром в этой точке. А сфера – это не линия, а поверхность.

А разве линия не может заполнять поверхность?

Во всяком случае, сфера – это не окружность в естественном смысле. Но тогда что такое линия?

Я предлагаю не сосредоточиваться на этом весьма непростом вопросе, а попытаться сформулировать такое определение окружности, которое не использовало бы ни слова «линия», ни каких-либо других слов, смысл которых не вполне ясен. При этом мы должны учитывать то отмеченное нами обстоятельство, что окружность в привычном понимании – это плоская линия.

Но как сформулировать такое определение окружности, в котором не присутствовало бы слово «линия»?

А что если воспользоваться тем, что всякая линия состоит из точек?

Теперь все ясно! Окружность – это множество всех точек, лежащих в какой-нибудь плоскости и находящихся на определенном расстоянии от некоторой точки, называемой ее центром.

Ну а уж с этим определением, я надеюсь, все в порядке?

№ 4. – Сколько у окружности центров?..

– Разумеется, один! В самом деле, пусть точки O_1 и O_2 – центры какой-нибудь окружности, r_1 – расстояние от O_1 до точек окружности, r_2 – расстояние от O_2 до ее точек. Проведем через O_1 и O_2 прямую. Пусть A и B – точки ее пересечения с окружностью, такие, что O_1 лежит между A и O_2, а O_2 – между O_1 и B. Так как $AB = AO_1 + O_1B = r_1 + r_1 = 2r_1$ и $AB = AO_2 + O_2B = r_2 + r_2 = 2r_2$, то $r_1 = r_2$. Но $O_1B = O_1O_2 + O_2B = O_1O_2 + r_2$. С другой стороны, $O_1B = r_1 = r_2$. Таким образом, $O_1O_2 + r_2 = r_2$. Отсюда $O_1O_2 = 0$, а значит, $O_1 = O_2$.

В действительности у всякой окружности бесконечно много центров. Рассмотрим произвольную окружность. Пусть O – какой-нибудь ее центр, m – прямая, проходящая через точку O перпендикулярно плоскости, в которой расположена эта окружность. Легко доказать что всякая точка на m одинаково удалена от всех точек окружности, а значит, является ее центром.

Но, говоря о центре окружности, имеют в виду точку, расположенную в той же плоскости, что и сама окружность. И на этом основывалось приведенное доказательство.

Однако вывод, полученный из последнего нашего определения, не соответствует естественному пониманию того, что такое центр окружности. Он показывает, что следование этому определению уводит от значимых сторон дела. Ведь и строя окружность с помощью циркуля, мы используем такой ее центр, который лежит в той же плоскости, что и сама эта окружность.

Следовательно, под центром окружности естественно понимать ту единственную точку, равноудаленную от всех точек окружности, которая лежит в той же плоскости, что и сама эта окружность.

Договоримся следовать такому пониманию.

№ 5. *Вопрос 1.* Всякая ли окружность имеет с какой-нибудь прямой единственную общую точку?

Вопрос 2. Всякая ли окружность имеет с какой-нибудь прямой две общие точки?

Вопрос 3. Существует ли окружность, имеющая с какой-нибудь прямой более двух общих точек?

Вопрос 4. Существует ли такая окружность, что всякая прямая имеет с ней не более одной общей точки?

Вопрос 5. Существует ли окружность, лежащая (одновременно) в нескольких плоскостях?

Вопрос 6. Квазицентром окружности условимся называть всякую точку пространства, равноудаленную от всех ее точек. Существует ли такая окружность, что всякая точка пространства является ее квазицентром?

Преувеличение роли «формальной» логики и недопонимание ее креативной роли в обучении математике, настойчивые попытки «очищения» обучения математике от использования внепонятийных форм мышления порождаются метаустановкой традиционной педагогики, состоящей в том, что в качестве объекта изучения математики как учебной дисциплины рассматриваются идеальные математические объекты и «формально»-логические средства их исследования. Таким образом то, что должно быть *предметом* математики, превращается в ее *объект*. Отсюда *моно-логизм* в стратегии обучения, отсюда и догматизм, особенно остро проявляющийся в преподавании геометрии. В результате такой формы мышления способы действий, рождаемые самой природой математической деятельности, превращаются всего лишь в навязываемые правила игры.

Обучение математике вне связей с содержательной базой, несущей достаточно богатую систему процедур, значений и смыслов, а с нею ценности, задачи и цели, не может не привести к утрате Знания, к формализму в обучении.

Осознанию учащимися необходимости доказательств и формированию у них способности к их поиску способствует такая стратегия обучения математике, при следовании которой идеальные объекты не «открываются» как *предсуществующие*, а *формируются* как модели нечетких обиходных представлений.

Приведенный сценарий следует именно такой стратегии. Ее методологическое существо состоит в «разведении» объекта и предмета математики. В качестве объекта выступают обыденные, диффузные пространственные формы и количественные отношения, и «разведение» рождает активный диалог между объектом и предметом изучения. В результате процесс обучения математике преобразуется в движение от обыденных представлений к идеальным объектам как их продуктивным моделям и далее к их освоению и как предмета изучения, и как методов решения практических задач, и как средств «саморазвития» таких методов, и как языка описания механизмов самой математической деятельности, и как языка науки.

Сергей Рувимович Когаловский *– профессор, зав. кафедрой начального математического образования Шуйского государственного педагогического университета.*